



TITLE:

# ノズル出口付近の流れ (流体力学における非定常問題)

AUTHOR(S):

河村, 哲也; 海老, 豊

---

CITATION:

河村, 哲也 ...[et al]. ノズル出口付近の流れ (流体力学における非定常問題). 数理解析研究所講究録 1980, 393: 146-165

ISSUE DATE:

1980-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104970>

RIGHT:

## ノズル出口付近の流れ

東大 工学部 河村 哲也  
(株) リコー 海老 豊

## §1 はじめに

微小なノズルから噴き出した流体のふるまいを調べることは、インクジェットプリンターとの関連において最近注目されている問題である。また数値計算の面からいっても、自由境界面を含んだ非定常問題であり興味がある問題である。本研究は円筒形のノズルから噴き出した流体が切れて液滴になるまでの流れの様子を、数値的に Navier-Stokes 方程式を解くことにより調べたものである。

液体柱に規則正しい振動を与えると規則正しく切れて液滴になることは古くから実験的に知られていた。このことについての理論的な解析は Rayleigh<sup>(1)</sup>によってなされた。Rayleigh は非粘性の無限に長い液柱に正弦波的な振動を与えて、それがどのように成長するかを、振幅が小さい範囲で線形近似が成り立つとして調べた。Rayleigh の理論は液滴生成のメカニ

ズムのおおよその予想には役立ったが、細かい点では実際の現象とはかなり異っている。そこで粘性を考慮に入れた計算<sup>(2)</sup>、非楕円性のある程度考慮に入れた計算<sup>(3)(4)</sup>が、現在までに数多くなされてきた。しかし現在のところ、現象を完全に説明するにはいたっていない。

インクジェットプリンターではインク滴を直接紙にふきつけて印刷をするので、インク滴の生成の仕方とその制御が問題となる。インク滴を作るには上述の液体柱の振動を利用する方法の他に、必要な時にパルス圧をノズルに加えて、断続的にインクを噴き出させてインク滴を作る方法がある。後者の場合には当然 Rayleigh 式の解析を用いることはできない。またノズルの形状が液滴生成に及ぼす影響なども実用的には重要な問題であるが、この場合にも Rayleigh 式の解析方法では予測できない。そこで、もし Navier-Stokes 方程式を直接数値的に解くことができれば、上記の問題を一括して（単なる境界条件の与え方の差だけの問題として）取り扱うことができる。

始めにも述べたように、ノズル出口付近の流れの様子を調べる問題は最近士かんに研究されているが、その大部分が上述の非楕円の安定性理論を用いたもの、あるいは直接実験を行ったもので、数値的に Navier-Stokes 方程式を解く方法

は現在のところみられない。その理由として次の3点が考えられる。(i) 流体が外界に噴き出したところでは自由表面になっているが、自由表面を含んだ流体の数値計算はかなり困難である。(ii) 液滴の生成には表面張力が本質的な役割を果たしていると考えられるが、数値計算で表面張力を正確に評価することは困難である。(iii) 液体柱に振動を与えて液滴を作る場合、液滴の生成場所がノズル径に比べてかなり大きなところなので、そこまで安定に計算を進めるためには膨大な計算時間が必要である。

本研究では数値計算の種々の利点を考えて数値計算を行ったが、上に述べた困難を次のようにして解決した。(i)の問題を解決するためには自由表面を含んだ問題を取り扱えるスキームが必要だが、それには Harlow と Welch が開発した MAC 法<sup>(5)</sup> (Marker-And-Cell method) を利用した。ただし MAC 法には境界条件の取り扱い方などに対して不十分な点があり、発表以来種々の改良が加えられているが、本研究でも自由表面での境界条件などでかなり改良した。(ii)については比較的簡単に表面張力を評価できる方法を考案し、それを用いて計算を行ったが、時間間隔を小さくして計算すれば計算結果と実験結果とはよい一致を見た。(iii)については、もとの MAC 法では非線形項に中心差分を用いているが、こ

こでは上流差分を用い、安定性の良い計算を行って計算時間を節約した。

## §2 計算のスキーム

本研究では、流体は非圧縮性の粘性流体とした。またノズルから出た直後の問題なので非定常問題である。ノズルの形状は円筒形とし、軸対称性を仮定した。外界は真空とみなして、流体と外部（の空気）との相互作用を無視した。（インクジェットの実験からは、これは無視できる大きさであることがわかっている。）以上のことを考慮して基礎方程式は次にあげる連続の式と Navier-Stokes 方程式である。

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{W} = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + (\mathbf{W} \cdot \nabla) \mathbf{W} = -\operatorname{grad} \varphi + \nu \Delta \mathbf{W} \quad (2) \end{array} \right.$$

ただし  $\varphi = P/\rho$  . (圧力を一定値の密度で割ったもの)

$\nu = \mu/\rho$  . (動粘性率)

(1), (2) を数値的に解くわけだが、自由表面上での境界条件を考慮に入れると、直接速度  $\mathbf{W}$  と圧力  $\varphi$  ( $P$ ) について解くのがよいと思われる。

(2) 式の  $\operatorname{div}$  を とると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} W) + \operatorname{div}(W \cdot \nabla) W = -\Delta \varphi + \nu \Delta \operatorname{div} W \quad (3)$$

(3) 式で, (1) より  $\operatorname{div} W = 0$  であるが, (3) を差分方程式になおして解く場合には,  $\operatorname{div} W$  をはじめからゼロとはせずに補正項として残しておく。すなわち, もし微分方程式として解ければゼロになるはずだが, 実際には差分方程式にするため, (3) で  $\operatorname{div} W = 0$  として解いて得られた解  $W'$  は正確には  $\operatorname{div} W' = 0$  とはならず, わずかに誤差をもっている。したがって時間を追うにしたがい, 誤差が集積してくる可能性があるのび, 誤差がたまらないように工夫する必要がある。そのために (3) の  $\operatorname{div} W$  の項を利用する。 (3) 式を差分化すると  $\operatorname{Div} W^n \equiv D^n$  (ただし肩の  $n$  は時間ステップ  $n$  での値を示す。) とおいて,

$$\frac{D^{n+1} - D^n}{\Delta t} + \operatorname{Div}(W^n \cdot \nabla_h) W^n = -\Delta_h \varphi^n + \nu \Delta_h D^n \quad (4)$$

ただし  $\operatorname{Div}$ ,  $\nabla_h$ ,  $\Delta_h$  は微分演算子  $\operatorname{div}$ ,  $\nabla$ ,  $\Delta$  に対応する差分演算子であり,  $\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} W)$  の項には, 前進差分が利用してある。

(4) において,  $D^{n+1} = 0$  とおいて差分方程式を解くと, 得られた  $W^n$  は次の時間ステップで  $\operatorname{div} W = 0$  を近似的に満たすはずで, このやり方で計算を進めていくと, いつまで

たっても  $\Delta t W$  を、小さな量にとどめておくことができる。

(2) 式を差分化して変形した式 (2)' と, (4) で  $D^{n+1} = 0$  とおいて変形した式 (4)' がこの問題の基礎方程式である。

$$\begin{cases} \Delta_h \psi^n = -\text{Div}(W^n \cdot \nabla_h) W^n + \left( \nu \Delta_h D^n + \frac{D^n}{\Delta t} \right) & (4)' \\ W^{n+1} = W^n + \Delta t \cdot \left\{ -(W^n \cdot \nabla_h) W^n - \text{Grad} \psi^n + \nu \Delta_h W^n \right\} & (2)' \end{cases}$$

すなわち,  $W^n$  が既知とすれば (4)' の右辺が計算でき, それを用いて (2)' を解き  $\psi^n$  を求める。そして  $\psi^n$  と  $W^n$  より (2)' の右辺が計算でき, 新しい時間ステップでの  $W^{n+1}$  が求まることになる。

次の問題は時々刻々変化する自由表面の形を計算の各ステップで決定することである。そのために MAC 法では, 自由表面上に マーカー粒子と呼ばれるめじるしをつけておき, その粒子をその位置での速度で微小時間移動させることにより, 自由表面の形を決定する。(Fig 1 参照)

すなわち, ある時刻でのマーカー粒子の位置を  $X^n$  とすれば, 微小時間  $\Delta t$  後には次のようになる。

$$X^{n+1} = X^n + W^n \cdot \Delta t. \quad (5)$$

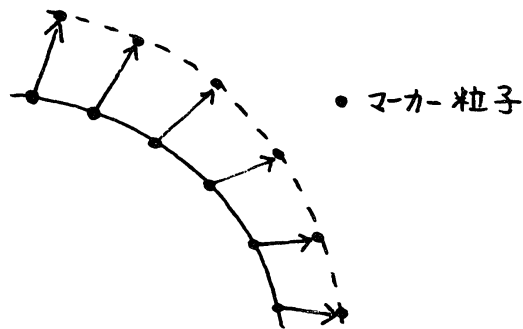


Fig 1

(4)', (2)' を実際の差分方程式になおして解く場合, まず四角座標に書き換える。

そして解くべき領域を長方形型のメッシュに分割し, 各メッシュでの速度  $V$  と圧力  $\varphi$  は Fig 2 のようにとる。

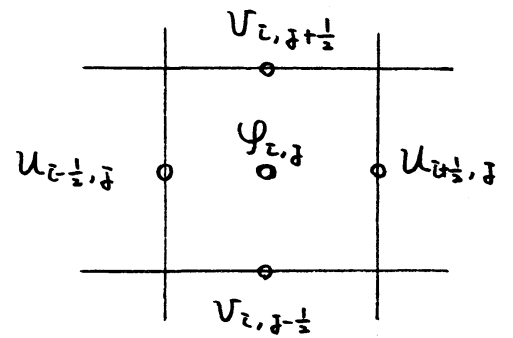


Fig 2

以下に計算手順を書く。

- (i) 初期条件から最初の時間ステップでの境界の形と速度場を定める。
- (ii) Navier-Stokes 方程式を, 連続の式を用いて変形して得られる圧力についての Poisson 方程式 (4)' を解き, 新しい圧力を計算する。
- (iii) (ii) で求めた圧力を用いて (2)' 式より, 次の時間ステップでの速度場を計算する。
- (iv) (iii) で求めた新しい速度を用いて, 自由表面上に配置したマーカー粒子を (5) 式にしたがって移動させて, 新しい境界面の形を決定する。
- (v) 以下 必要な回数 (ii) → (iv) のステップを繰り返す



### §3 境界条件

上述のスキームでは圧力についての Poisson 方程式を解くので、領域のまわりでの境界条件が必要になる。

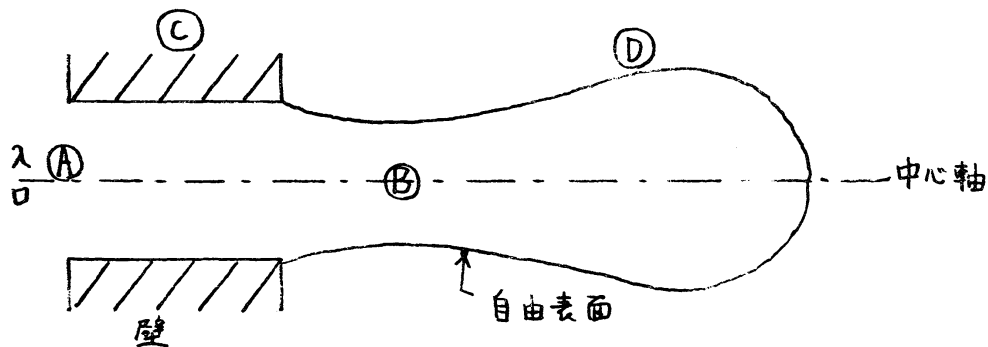


Fig 3

①, すなわち ノズル入口での条件は問題に応じて与えることができる。速度の条件で与えられた場合は、圧力は内部の点から補外して決める。中心軸 ②では、境界条件として対称性の条件を用いる。ノズル壁 ③での条件は粘着条件 ( $w=0$ ) を用いる。しかしこれは速度に対する条件なので (2)' に代入して圧力についての条件に直す。その結果は、たとえば Fig 4 の場合について

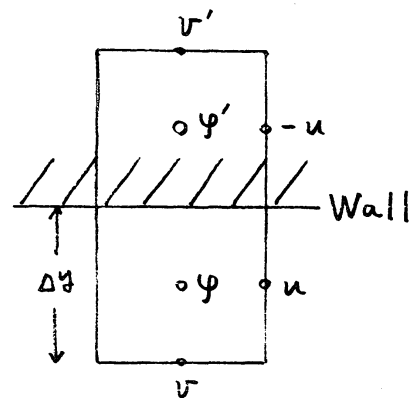


Fig 4

$$\psi' = \psi + \frac{\nu}{\Delta y} \{v' + v\} \quad (6)$$

自由表面④では、その内外で応力が連続的に変化する必要がある。すなわち応力を $P$ として、 $P_{ik}^{\text{内側}} = P_{ik}^{\text{外側}}$  あるいは

$$-\delta_{ik}\varphi + \nu e_{ik} = -\delta_{ik}\varphi_{\text{外側}} + \nu e_{ik}^{\text{外側}} \quad (7)$$

$$\text{ただし } e_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

$\delta_{ik}$ : クロネッカーのデルタ

ここで外部には流体がないとしているので  $e_{ik}^{\text{外}} = 0$ 。また外側から働く力は表面張力だけなので  $\varphi_{\text{外側}} = \varphi_s$  (= 表面張力/密度) である。法線ベクトルの  $x$  成分,  $y$  成分をそれぞれ  $n_x, n_y$  とすると (7) 式は

$$\varphi - 2\nu \left\{ n_x n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_x n_y \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + n_y n_y \frac{\partial v}{\partial y} \right\} = \varphi_s. \quad (8a)$$

$$\nu \left\{ 2n_x n_y \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (n_y n_y - n_x n_x) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} = 0. \quad (8b)$$

となる。(8a) 式は自由表面上で、圧力が満たすべき条件であり、(8b) 式は自由表面上のメッシュで未定の速度を決めるために利用しうる関係式である。実際には  $n_x, n_y$  を求めることはめんどうで誤差も大きいので、自由表面が(水平)と(45°の傾き)と(垂直)である3つの場合に大別した。

また (8a) では, この計算では  $\sigma$  が小さく  $\psi_s$  が大きいので,  $\psi_s$  を正確に決めればこの程度の近似でよいと考えられる。

液滴の生成には表面張力が本質的な役割を果たすので, 表面張力の評価が重要な問題になる。Fig 5 において表面張力  $\psi_s$  は次式で与えられる。

$$\psi_s = \sigma \left( \frac{1}{r_T} + \frac{1}{r_N} \right) \quad (9)$$

ただし

$$\left\{ \begin{array}{l} r_N = \frac{\partial^2 f / \partial x^2}{(1 + (\partial f / \partial x)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ r_T = (1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

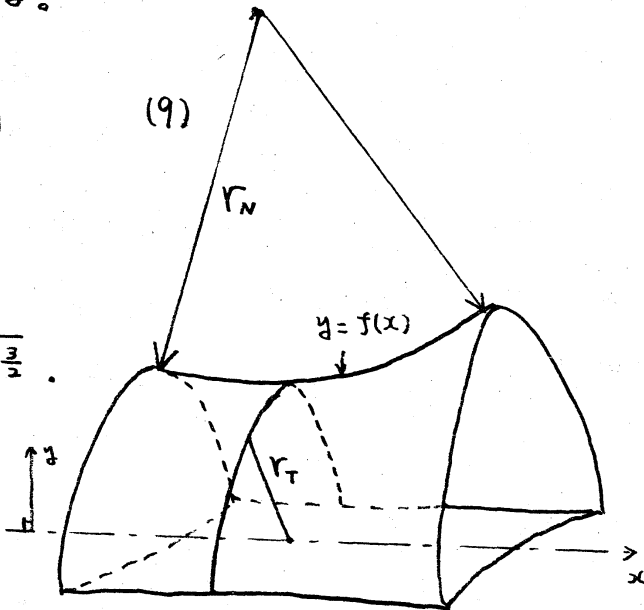


Fig 5

$\sigma$  は表面張力定数であり, 実験に使った流体の種類によって決まる量である。

曲率半径を正確に決定する場合, 境界の形が詳しく知られている必要がある。MAC法の場合, 表面の形はマーカー粒子で代表させるために, マーカー粒子は計算の各ステップで適当な間隔で並んでいる必要がある。そのために, マーカー粒子がつまりすぎた場所ではマーカー粒子をとりのぞき, 間隔が広がりすぎた場所では補充する必要がある。

ある。この計算では、マーカー粒子間の間隔がつねに  $1/4$  メッシュサイズ以上、 $1/2$  メッシュサイズ以下になるようにした。

曲率の決定には 3 点をとるのが必要十分であり、4 点以上の点を使う場合には最小二乗法を用いてなめらかな曲線を決定した上で曲率を計算する必要がある。この計算では簡単のため近くの 3 点から曲率を決定した。ただし同じメッシュ内での点をとったのでは意味がないので必ず隣りどうしのメッシュから 3 点を選んで曲率を計算した。このような簡単な曲率の評価の仕方でも、時間間隔を短かくすれば、実験結果に比べて満足のいく結果が得られた。

#### § 4 計算例

以上のスキームを用いて行った計算結果を 2-3 示す。Fig 6 は、ノズル入口で一定圧をかけた場合の計算結果を、X-Y プロッターを用いて表面形状と速度分布を描いた図である。レイノルズ数 ( $= UL/\nu$   $U$ : 平均流速,  $L$ : ノズル径,  $\nu$ : 動粘性率) は最終ステップで約 35 である。(図でステップ数は時間に比例した量である。) また無次元化した表面張力定数 ( $= \sigma/2\rho U^2 L$   $\sigma$ : 表面張力定数,  $\rho$ : 密度) は 5~10 で実験条件とほぼ同一である。ノズル内では圧力勾配がほぼ一定であると考えられるので、放物型の速度

(T = 0.4)

STEP 200

NOZZLE

$$\gamma = 0.2$$

$$\nu = 0.2$$

(T = 0.8)

STEP 400

NOZZLE

Fig 6

(T = 1.2)

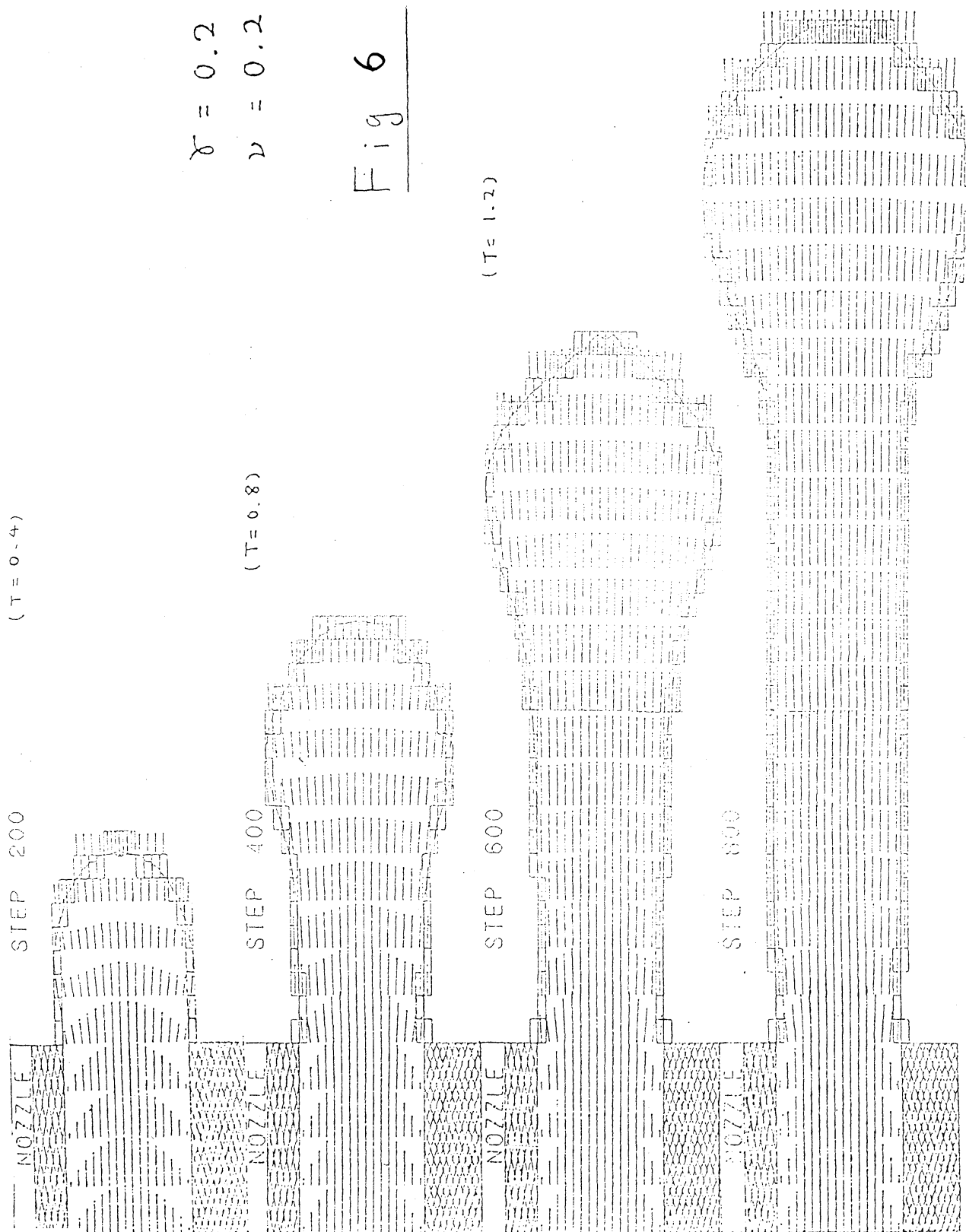
STEP 600

NOZZLE

(T = 1.6)

STEP 800

NOZZLE



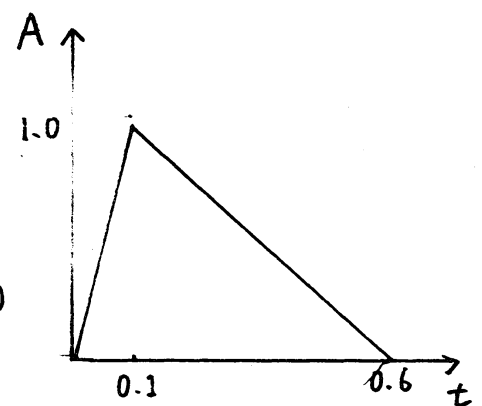
分布をもった流れ（ポアズイユ流）が実現されている。またノズルから遠くはなれたところでは一様流となっているが、それは壁面から力を受けなくなった結果、粘性の影響で速度差がなくなったためだと考えられる。ノズル出口付近ではポアズイユ流から一様流への遷移がみられる。先頭がまるく大きくなっているのは表面張力の影響と考えられ、またこの部分では速度が軸と垂直方向には一様ではなくなっている。

Fig 7 はパルス型の速度変動を与え、流量をなくして液滴を作った場合の計算結果である。この場合には実験結果があるので、実験条件に合わせた計算を行った。レイノルズ数は 200 程度であり、無次元化した表面張力定数は 5~10 である。実際の実験ではノズル入口での条件がどのようなになっているのかわからないので、近似的に下図のような三角形型の速度分布になっていると仮定して、計算を行った。その意味は

$$u \propto A(1-y^2). \quad (10)$$

で、 $A$  が三角形型に変化する

ということである。Fig 7 において 100 ステップでは、急に入口で速度を与えたために、ノズル管内では完全には



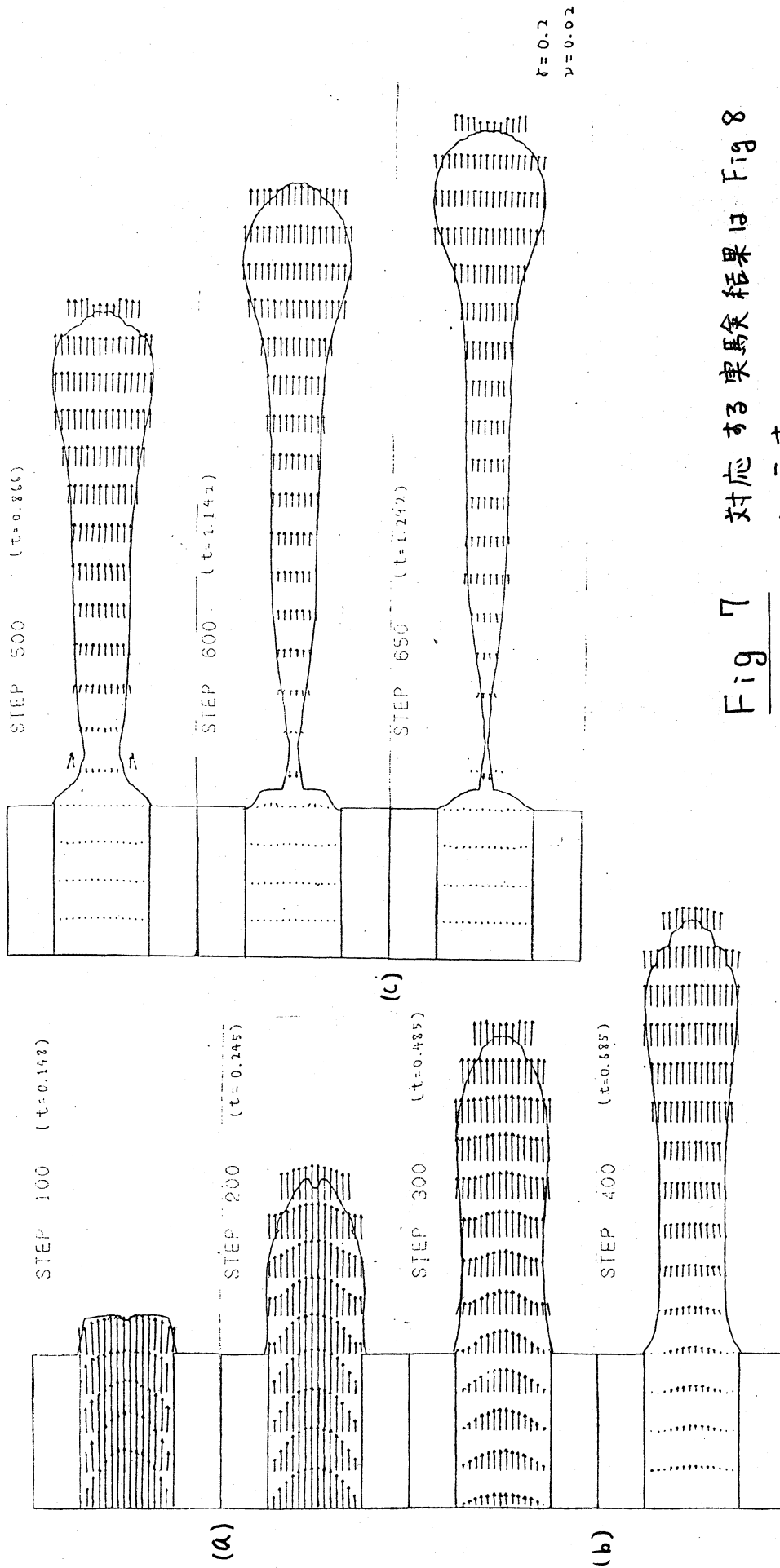
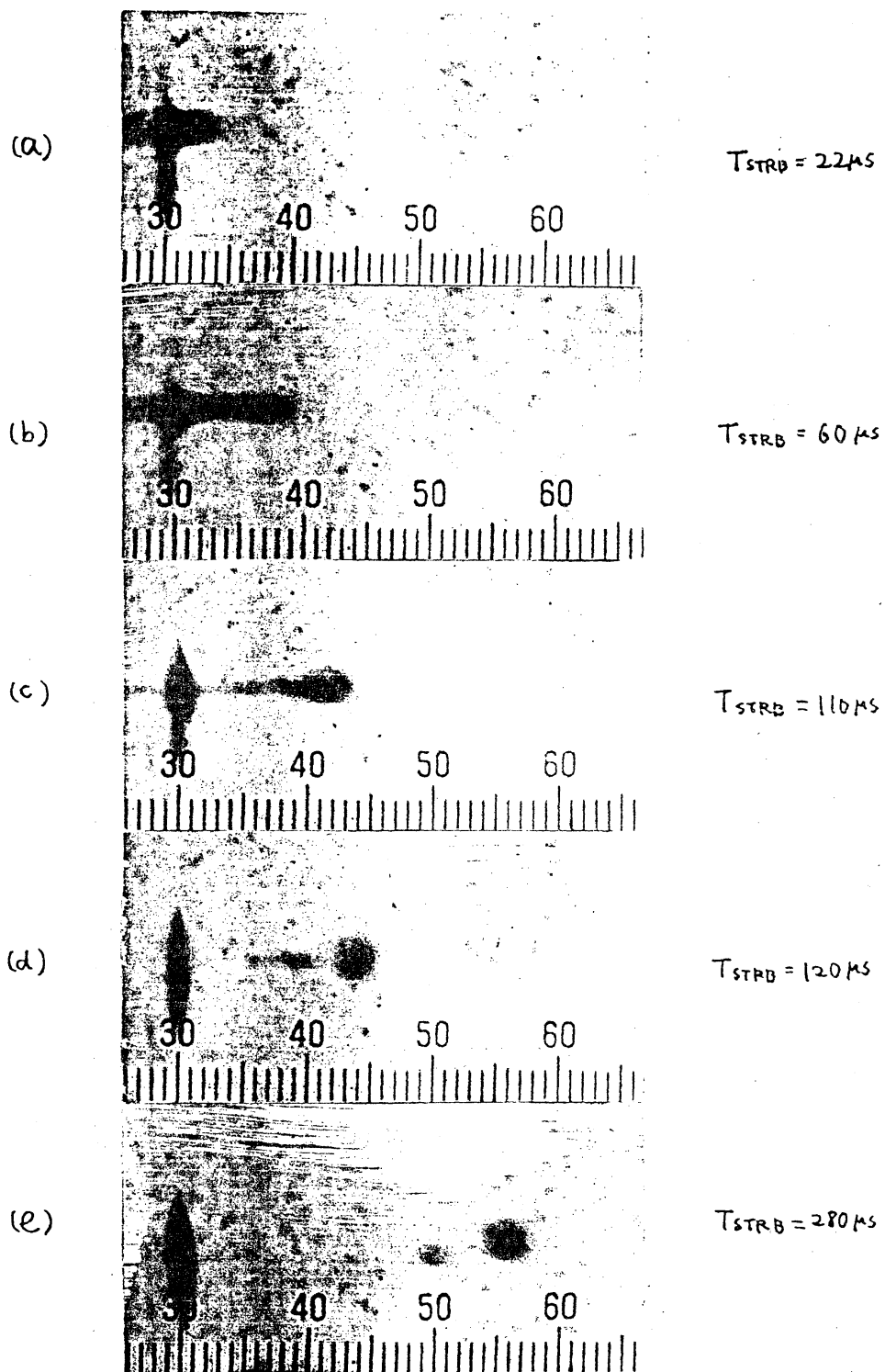


Fig 7 対応する実験結果は Fig 8 に示す。



(60X)

Fig 81 div = 25  $\mu m$

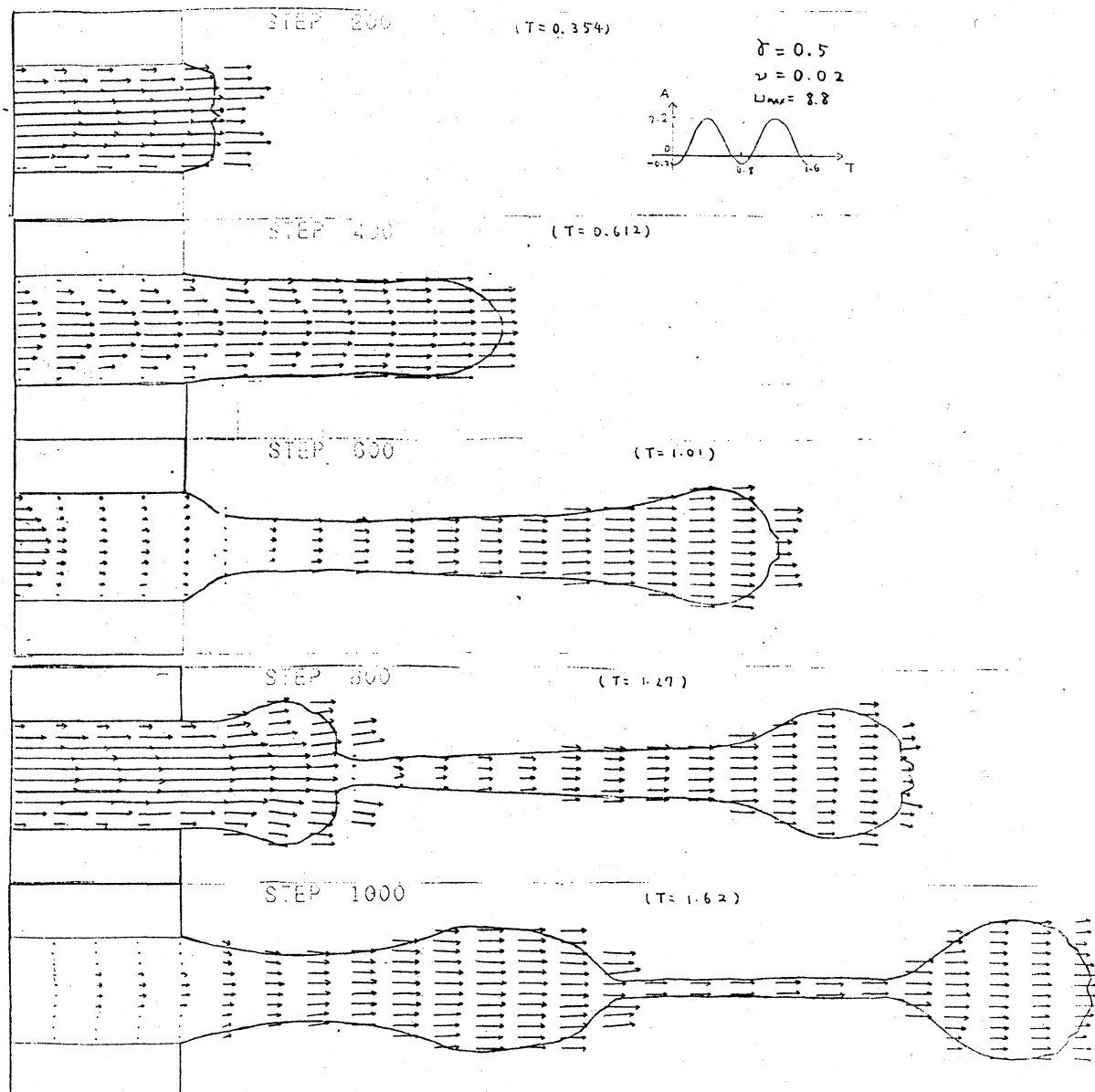


ポアズイユ流にはなっておらず、過渡的な速度分布がみられる。300 ステップではノズル入口で流量がかなり減少したため、ノズル出口付近で流体がくびれてきている。400 ステップでは完全に流入量はゼロであるが、先端部では流速をもち続けるためにくびれは大きくなる。500 ステップではノズル出口付近のくびれが大きくなったために、ノズル側の流体がおしもどされてくびれ付近で逆流が生じている。そして一度逆流がおこれば、ますますくびれが大きくなり、ついに切断をおこす。(650 ステップ) この計算の場合、切断したあとの先頭の液滴はかなり長い尾をひいており、尾の部分の速度は前半部よりおそくなっているのが特徴的である。Fig 8 にはこの計算に対応する実験結果が示してあるが、実験と計算とはよい一致がみられる。

Fig 9 はノズル入口に正弦波型の速度変動を与えた場合の計算結果である。この場合、計算時間との関係で早く切断して液滴が生ずるようにしたか、ため、次主に示すようにかなり振幅の変化を大きくした。ちなみち入口で

$$u \propto (1 - 1.2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} t)(1 - u^2) \quad (11)$$

であり、入の大きさは、ノズル径の4倍程度にとっている。この場合入が大きいので、十分先頭との間かくびれてから次

Fig 9

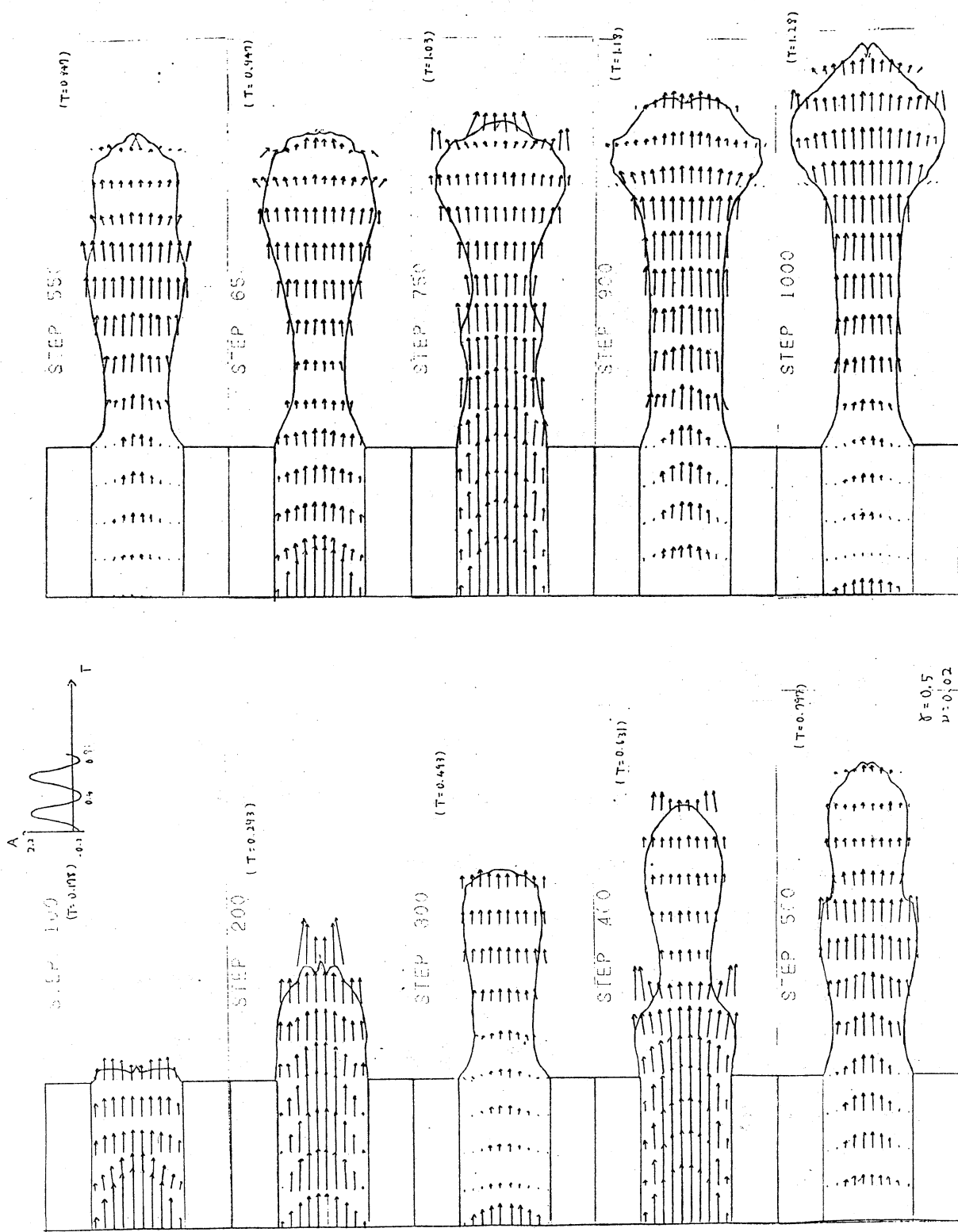


Fig 10

のがたまりができており、液体柱は切断するとみなされる。  
 (図の最終ステップで先頭滴と次の滴の間のくびれは1メッシュより小さくなっているのので、実際切断しているかいないか判断できない。) Fig 10 は (11)と同じ速度分布であるが、入の大まさをノズル径の2倍程度にとってある。この場合には液柱上の波は発達せずに減衰をおこしている。すなわち波の発達による液滴の生成はおこらないと思われる。直接の比較にはならないが参考のために Rayleigh の理論では、入がノズル径の $\pi$ 倍以上だと波が生長して切断をおこすが、それ以下だとおこさない。

## § 5 むすび

以上のように、ノズル出口付近の流れの様子を数値的に直接、Navier-Stokes 方程式を解くことにより解析することが可能である。その場合、非線形性を完全に考慮に入れることができ、またノズルの形状やノズル入口での条件は問題に応じて種々に変化させることができる。計算時間が許すかぎりメッシュを細かくとればとるほど正確な計算ができると考えられる。

## Reference

- (1) Rayleigh, L. 1879. On the instability of jets. Proc. R. Soc. 10: 130-45
- (2) Weber, C. 1931. Zum Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles. Z. Angew. Math. Mech. 11: 136-41
- (3) Boggy, D.B. 1979. Drop formation in a circular liquid jet. Ann. Rev. Fluid Mech. 11: 207-28
- (4) Chaudhary, K.C., Redekopp, L.G. 1980. The nonlinear capillary instability of a liquid jet. J. Fluid Mech. 96: 257-92
- (5) Harlow, F.H., Welch, J.E. 1965. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. Phy. Fluids 8: 2182-89
- (6) Hirt, C.W., Shannon, J.P. 1968. Free surface stress conditions for incompressible flow calculations. J. Comp. Phys. 2:403-11
- (7) Chan, R.K.C., Street, R.L. 1970. A computer study of finite amplitude water waves. J. Comp. Phys. 6: 68-94